Prova 2 – Introdução à Álgebra Linear – 2006

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas. Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita e têm produto interno.

1. Seja V um espaço vetorial. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ ortonormais, mas não necessariamente uma base de V. Prove que $v \in S(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ se e somente se $|v|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i \rangle^2$.

2. Seja V um espaço vetorial e U um subespaço de V. Fixe $v_0 \in V$. Considere o funcional linear f definido em U por $f(u) = \langle u, v_0 \rangle$ para $u \in U$.

(a) Prove que existe um único elemento $u_0 \in U$ tal que $f(u) = \langle u, u_0 \rangle$ para todo $u \in U$.

(b) Calcule u_0 a partir de v_0.

3. Considere a transformação linear $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (-4x - 6y, 3x - 8y).$$

(a) Encontre bases ortonormais $\{v_1, v_2\}$ e $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbf{R}^2$ em relação às quais T seja dada por uma matriz diagonal.

(b) Descreva a imagem do círculo unitário por T.