

Lista 1 – Análise na Reta – Verão de 2009

Para ser entregue dia 16/01/09.

Professor: Luiz Henrique de Figueiredo

Monitor: Tertuliano Franco

1. Um número real é dito algébrico se é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Um número real é dito transcendente se não é algébrico. Prove que o conjunto dos números transcendentos é não-enumerável.
2. Prove que o conjunto das sequências crescentes de números naturais $(n_1 < n_2 < \dots)$ é não-enumerável.
3. Prove, por indução, que se $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ pertencem ao intervalo (α, β) e $b_1, \dots, b_n, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$, então $\frac{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n}{t_1 b_1 + \dots + t_n b_n}$ pertence a (α, β) .
4. Explique, com palavras, o erro na seguinte indução:

Afirmção: Dado um conjunto de n bolas, se uma delas é azul, então todas são azuis.

Demonstração: Para $n = 1$, como pelo menos uma bola é azul e há apenas um elemento, então todas são azuis. Suponha a afirmação válida para um dado n . Tome um conjunto de $n + 1$ bolas, onde pelo menos uma é azul. Tire um elemento do conjunto que não seja esta bola azul fixada. Pela hipótese de indução, todas as bolas desse conjunto com n elementos são azuis. Retire uma bola desse conjunto e reponha a bola tirada inicialmente. Novamente pela hipótese de indução temos que todas as $n + 1$ bolas são azuis.