Prova 3 de Análise na Reta

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $f\colon I \to \mathbf{R}$ uma função derivável num intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ com $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in I$. Mostre que f tem no máximo um ponto fixo.

2. Seja $f\colon [0,2] \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$. Encontre um número $M \in \mathbf{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, para todos $x, y \in [0,2]$.

3. Seja $f\colon I \to \mathbf{R}$ uma função derivável num intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$. O que se pode dizer sobre f se tivermos $f'(I) \subseteq \mathbf{Q}$?

4. Seja $f\colon I \to \mathbf{R}$ uma função limitada e integrável num intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

(a) Mostre que $\displaystyle\int_I f \geq 0$.

(b) Mostre com um exemplo que podemos ter $\displaystyle\int_I f = 0$ mesmo que $f \neq 0$.

(c) Mostre que se f é contínua e $\displaystyle\int_I f = 0$ então $f = 0$.

5. Seja $f\colon [0,2] \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = 1$, se $x \neq 1$, e $f(1) = 2$.

Seja $F\colon [0,2] \to \mathbf{R}$ a integral indefinida de f, isto é, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Em que pontos F é contínua? Em que pontos F é derivável? Em que pontos temos $F'(x) = f(x)$?