

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Prova de Análise Numérica – 2009

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Considere a equação $x^3 - 2x - 5 = 0$, usada originalmente por Newton para explicar o seu método.
 - (a) Prove que essa equação tem uma única raiz real e que essa raiz está no intervalo $[2, 3]$.
 - (b) Prove que o método de Newton para essa equação converge quadraticamente qualquer que seja o ponto inicial x_0 tomado no intervalo $[2, 3]$.

2. Uma matriz (a_{ij}) tem *diagonal dominante* quando

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n |a_{ij}|.$$

Prove que todo sistema linear com uma matriz de diagonal dominante pode ser resolvido com eliminação gaussiana sem pivoteamento.

3. Considere o trecho de programa abaixo:

```
eps = 1
while (1 + eps > 1)
    eps = eps/2
end
print(eps)
```

O resultado obtido é $1.1102230246252e-16$, que é justamente o ε da máquina correspondente à precisão dupla no padrão IEEE.

- (a) Explique por que o algoritmo acima pode ser usado para encontrar o ε da máquina.
 - (b) Tendo em vista o esquema de representação em ponto flutuante, qual seria o resultado se a segunda linha do programa acima fosse `while (2 + eps > 2)`? E se fosse `while (5 + eps > 5)`?
4. Considere $f(x) = \log(x + 1)$ no intervalo $I = [0, 1]$, onde $\log =$ logaritmo natural. Seja p_n o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \dots, x_n \in I$.
 - (a) Calcule uma cota superior para o erro $\|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)|$ que dependa somente de n e não da escolha dos pontos de interpolação.
 - (b) Prove que $p_n \rightarrow f$ uniformemente.
 - (c) Para qual n temos $\|f - p_n\|_\infty \leq 10^{-6}$?