

Quinta Lista

Int. a Teoria dos Números

1. Seja p primo e $g_1, g_2, \dots, g_{\phi(p-1)}$ suas raízes primitivas. Prove que:

$$\sum_{i=1}^{\phi(p-1)} g_i \equiv \mu(p-1) \pmod{p}$$

2. Prove que:

$$\frac{n}{\phi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)^2}{\phi(d)}$$

3. Prove que:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\phi(n)} = O(\log(x))$$

4. Prove (usando o teorema dos números primos) que para todo $\lambda > 1$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe um primo entre n e λn .

5. Prove que:

$$\sum_{d|n} \mu(d) \log^m(d) = 0$$

6. Prove que:

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right]^2 + \frac{1}{2}$$