**A Transcendência de**

**1 Introdução**

Tomando como base o artigo do professor Niven (1939), vamos demonstrar que o número é transcendente, desenvolvendo as passagens que ficaram implícitas no artigo referido, utilizando, para isso, algumas técnicas do cálculo.

Por séculos, matemáticos e gregos, tentaram resolver o problema da quadratura do círculo: saber se é possível, com compasso e régua, construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado. Depois que Lindemann (1882) demonstrou a transcendência do número podemos explicar porque tal construção não é possível. De fato, todos os segmentos possíveis de serem construídos com régua e compasso têm comprimento igual a um número algébrico. Se fosse possível quadrar o círculo, teríamos como construir, com régua e compasso, um segmento de comprimento igual a , o lado do quadrado de área igual a um círculo de raio igual a 1. Portanto, seguir-se-ia que seria algébrico. Logo, também seria algébrico. Absurdo, em virtude do fato de ser transcendente.

**2 O número é transcendente**

**Demonstração:**

Inicializaremos a demonstração supondo que seja um número algébrico. Sabemos que o produto de números algébricos é um número algébrico. Então é uma solução de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, ou seja, , cujas raízes são . Como consequência da hipótese feita, vamos chegar a um absurdo, demonstrando assim que não é um número algébrico. Consequentemente, também não pode ser um número algébrico.

**Passos:**

**1° Passo** Utilizando a relação de Euler obtemos

.

Com isso, vamos construir uma equação algébrica com coeficientes inteiros cujas raízes são os expoentes .

**2° Passo** Considerando primeiro os expoentes:

.

Temos que os mesmos são as raízes de , uma equação algébrica com coeficientes inteiros e grau . Similarmente, as somas de triplas de são raízes de . Continuando, da mesma forma, obtemos:

equações algébricas com coeficientes inteiros, cujas raízes são as somas dos tomados vezes respectivamente. Em resumo, as somas dos satisfazem a equação polinomial

com coeficientes inteiros e cujo grau é .

Excluindo as raízes nulas (se existirem) da equação , supondo que delas sejam diferentes de zero e representemo-las por , obtendo

com coeficientes inteiros cujas raízes são que também são os expoentes não excluídos da expressão .

**3° Passo** Observe que pode ser escrita na forma:

onde é um inteiro positivo.

**4° Passo** Considere

onde e é um número primo a ser especificado.

**5° Passo** Defina a função

.

**6° Passo** Um cálculo da derivada primeira de nos dá

.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever:

Substituindo por temos:

**7° Passo** Em atribuindo a variável os valores e utilizando , obtemos

Utilizaremos, para finalizar a demonstração, a ideia que, o lado esquerdo de é um inteiro não divisível por , consequentemente, diferente de zero e para p suficientemente grande, o lado direito é tão pequeno quanto quisermos e, logo, menor do que 1 em valor absoluto, uma contradição.

**8° Passo** De temos

Ainda em , multiplicando-se por , obtemos um polinômio com coeficientes inteiros. Como o produto de inteiros positivos consecutivos é divisível por , as derivadas superiores a de são polinômios com coeficientes inteiros divisíveis por . Logo, os mesmos, são divisíveis por e, por definição, também divisíveis por . Com isso, mostramos que para é um polinômio em de grau máximo cujos coeficientes são divisíveis por . Pelo teorema fundamental das funções simétricas, uma função simétrica de com coeficientes inteiros e grau máximo , será um inteiro desde que cada coeficiente seja divisível por . Então,

onde são inteiros. Isso significa que

é um número inteiro divisível por p.

**9° Passo** Também de fica claro que

Se for escolhido de forma que seja maior que (o que é possível, pois o conjunto dos números primos é infinito) segue-se que é um inteiro não divisível por .

**10° Passo** Observe que o lado direito de é

Isso é uma soma finita, cada termo pode ser escrito tão pequeno quanto quisermos basta escolher suficientemente grande, pois temos que, por um resultado de análise, o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

De fato, seja , tomando temos

Em geral

Então,

Chegando, assim, ao absurdo procurado. Sendo, o mesmo, proveniente da hipótese feita inicialmente que fosse algébrico. Logo, é transcendente e, consequentemente, também é transcendente.

**Referências**

NIVEN, Ivan. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 46, No. 8 (Oct., 1939), pp. 469­­­-471.