Prova 3 – Introdução à Álgebra Linear – 2006

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas. Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita e têm produto interno.

1. Um operador linear $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tem autovetores $(1,2)$ e $(2,-1)$. Prove que T é auto-adjunto.

2. Seja T um operador linear num espaço vetorial V. Seja λ um autovalor de T com autovetor v. Seja p um polinômio. Prove que $p(T)(v) = p(\lambda)v$. Conclua que se $p(T) = 0$ então λ é uma raiz de p.

3. Considere o operador linear $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (7x + 2y, -15x - 4y).$$

(a) Prove que existe uma base ortonormal em relação à qual T é dado por uma matriz triangular.

(b) Prove que existe uma base em relação à qual T é dado por uma matriz diagonal.

(b) Existe alguma base *ortonormal* em relação à qual T seja dado por uma matriz diagonal?