Prova 1 – Introdução à Álgebra Linear – 2006

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas. Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita.

1. Sejam V um espaço vetorial e V' um subespaço de V.

(a) Prove que existe um operador linear $T\colon V \to V$ tal que $\ker T = V'$.

(b) Sob que condições V' é o núcleo de algum *funcional* linear em V?

(c) Prove que existe um operador linear $T\colon V \to V$ tal que $\operatorname{im} T = V'$.

(d) Seja $T'\colon V' \to W$ uma transformação linear de V' num espaço vetorial W. Prove que T' pode ser estendida para uma transformação linear $T\colon V \to W$, isto é, que existe uma transformação linear $T\colon V \to W$ tal que $T(v) = T'(v)$ para todo $v \in V'$.

2. Sejam V e W espaços vetoriais e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Seja V' um subespaço de V e W' um subespaço de W. Expresse $T^{-1}(T(V'))$ em termos de V' e $\ker T$. Expresse $T(T^{-1}(W'))$ em termos de W' e $\operatorname{im} T$.

3. Considere as funções $f_1, f_2, f_3, f_4\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definidas por

$$f_1(t) = t^3, \quad f_2(t) = t^2(1-t), \quad f_3(t) = t(1-t)^2, \quad f_4(t) = (1-t)^3.$$

Mostre que elas são linearmente independentes. Qual o espaço gerado por elas?

4. Expresse o posto da matriz abaixo como função de t:

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t^2 & 1 & t \\ t & t & 1 \end{bmatrix}$$