Prova 2 de Análise na Reta

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $A \subseteq \mathbf{R}$ limitado superiormente e seja $\alpha = \sup A$. Mostre que α é aderente a A. É sempre verdade que α é um ponto de acumulação de A?

2. Seja $X \subseteq \mathbf{R}$. Mostre que se X é conexo então $\overline{X}$ é conexo. Vale a recíproca?

3. Seja $f\colon I \to \mathbf{R}$ uma função contínua num intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$. Mostre que se $f(I) \subseteq \mathbf{Q}$ então f é constante.

4. Seja $f\colon [0,1] \to [0,1]$ contínua. Mostre que f tem pelo menos um *ponto fixo*, isto é, existe pelo menos um ponto $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

5. O *conjunto de zeros* de $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é $Z(f) = \{x \in \mathbf{R} : f(x) = 0\}$.

(a) Mostre que se f é contínua então $Z(f)$ é fechado.

(b) Seja $A \subseteq \mathbf{R}$ não vazio. Defina a *distância* de um ponto $x \in \mathbf{R}$ ao conjunto A por $d_A(x) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Mostre que $Z(d_A) = \bar{A}$.

(c) Mostre que $|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbf{R}$ e conclua que d_A é contínua. [Dica: mostre que $d_A(x) \leq |x - y| + d_A(y)$.]

(d) Conclua a seguinte recíproca de (a): Se $X \subseteq \mathbf{R}$ é fechado, então existe $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ contínua tal que $Z(f) = X$.