Prova 1 de Análise na Reta

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Mostre por indução que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

para todo número real $x > -1$ e todo $n \in \mathbf{N}$.

2. O teorema dos intervalos encaixados diz que a interseção de uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados nunca é vazia, ou seja, dados intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ satisfazendo $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Mostre por meio de exemplos que é essencial que os intervalos sejam fechados e limitados, isto é, que esse teorema não pode ser estendido para intervalos abertos da forma (a_n, b_n), nem para intervalos semi-abertos da forma $(a_n, b_n]$, nem para intervalos ilimitados da forma $(-\infty, b_n]$.

3. (a) Para quais valores de $x \in \mathbf{R}$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge?

(b) Analisando as suas somas parciais, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Use o critério de comparação para concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

(c) Sejam $a, b \in \mathbf{R}$ com $0 < a < b < 1$. Use o teste da raiz para concluir que a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ converge. Mostre que o teste da razão não permite concluir isso.

4. Dizemos que uma sequência (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$. Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy. Use o teorema de Bolzano–Weierstrass ("Toda sequência limitada tem uma subsequência convergente") para concluir a recíproca: Toda sequência de Cauchy converge.