

## Prova de Análise Numérica

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Ache um intervalo contendo uma raiz de  $x^3 = x + 1$  que possa ser usado no método da biseção. Usando esse intervalo, após quantas interações desse método podemos garantir que temos uma estimativa da raiz com erro menor que  $10^{-6}$ ? (Lembre que  $2^{10} = 1024$ .)
2. Mostre que o Método de Newton para a equação  $x^3 = 2$  converge para qualquer ponto inicial  $x_0$ . Dê um intervalo no qual a convergência é quadrática. (Caso precise, use  $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ .)
3. Ache um polinômio que interpole os dados abaixo. Qual o valor desse polinômio em  $x = 5$ ?

$x$	1	2	3	4
$y$	1958	1962	1970	1994

4. Seja  $f(x) = \log(x + 1)$  no intervalo  $I = [0, 1]$ , onde  $\log =$  logaritmo natural. Seja  $p_n$  o polinômio que interpola  $f$  nos pontos  $x_0, \dots, x_n \in I$ . Calcule uma cota superior para o erro  $\|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)|$  que dependa somente de  $n$  e não da escolha do pontos de interpolação. Conclua que  $p_n \rightarrow f$  uniformemente. Qual o grau de  $p_n$  para o qual  $\|f - p_n\|_\infty \leq 10^{-6}$ ?
5. Obtenha uma fórmula de integração numérica do tipo

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

que seja exata para polinômios de grau até 3 inclusive, usando  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = 2/3$ ,  $x_3 = 1$ .