Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova de Algoritmos – 2011

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. (a) O algoritmo A leva tempo $1000n$. O algoritmo B leva tempo $5n^2$. Qual o melhor algoritmo do ponto de vista assintótico? A partir de qual n vale a pena usar esse algoritmo?

(b) Verdadeiro ou falso? $2^{n+1} = O(2^n)$? $2^{2n} = O(2^n)$?

(c) Sejam f e g funções positivas. Prove que $\max(f, g) = \Theta(f + g)$.

2. Seja S um conjunto de n pontos no plano. A *profundidade convexa* de um ponto p de S é o número de camadas convexas que devem ser removidas de S até que p esteja na fronteira do fecho convexo. Considere o problema de calcular a profundidade convexa de todos os pontos de S.

(a) Prove que esse problema tem complexidade $\Omega(n \log n)$.

(b) Adapte o algoritmo de Jarvis para resolver o problema.

(c) Prove que o algoritmo de (b) leva tempo $O(n^2)$ no pior caso.

(d) Pode-se concluir de (a) e (c) que esse algoritmo não é ótimo?

3. Considere o problema de multiplicar duas matrizes $n \times n$.

(a) Prove que esse problema tem complexidade $O(n^3)$ e $\Omega(n^2)$.

(b) Quando n é uma potência de 2, podemos dividir cada matriz em 4 blocos de tamanho $n/2$ e fazer a multiplicação por blocos:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

Prove que o algoritmo recursivo obtido a partir desse esquema de divisão-e-conquista ainda é cúbico.

(c) Strassen notou que basta fazer 7 (em vez de 8) produtos de matrizes menores:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 + P_7 \end{bmatrix}$$

onde $P_1 = A(F - H)$, $P_2 = (A + B)H$, $P_3 = (C + D)E$, $P_4 = D(G - E)$, $P_5 = (A + D)(E + H)$, $P_6 = (B - D)(G + H)$, $P_7 = (A - C)(E + F)$.

Prove que o algoritmo recursivo obtido a partir desse esquema satisfaz

$$T(n) = 7\,T(n/2) + O(n^2)$$

e portanto é sub-cúbico, isto é, $T(n) = O(n^\alpha)$ com $\alpha < 3$.