Prova 1 – Análise Complexa – 2007

Escolha quatro das questões abaixo. Fazer todas as cinco rende pontos extras. Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. (a) Prove que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{atan}\frac{1}{2} + \operatorname{atan}\frac{1}{3}$$

[Dica: considere $(2+i)(3+i)$.]

(b) Prove que todas as soluções da equação $(z-1)^{10} = z^{10}$ têm parte real igual a $1/2$ sem resolver a equação. Encontre todas as soluções.

(c) Calcule $(1+i)^n + (1-i)^n$ para todo n inteiro.

[Dica: considere $\omega = (1+i)/|1+i|$.]

(d) Prove que a equação $z^5 - 2z^2 + 3z + 8 = 0$ não tem solução dentro do círculo unitário.

2. Prove que se f é holomorfa em um aberto conexo Ω e $|f|$ é constante em Ω, então f é constante em Ω.

3. Prove que se uma série de potências tem coeficientes limitados, então o seu raio de convergência é pelo menos 1.

4. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ converge quando $|z| < 1$. Qual a soma da série nesse caso?

5. Descreva explicitamente um ramo do logaritmo em $\mathbf{C} \setminus R$, onde $R = \{x + iy \in \mathbf{C} : y = x^2, x \geq 0\}$. Explique por que ele é contínuo. Qual o valor desse logaritmo em $2 + 2i$? E em $1/2 + 1/2i$? Calcule a imagem total desse ramo.